*Les vecteurs sont désignés selon : $\overrightarrow{X}$, $X$ désignant la norme de $\overrightarrow{X}$. Dans tous les exercices, le référentiel galiléen $\mathscr{R}_T$, dans lequel règne le champ de pesanteur $\overrightarrow{g}$ sera, sauf mention explicite, considéré galiléen pour la durée des phénomènes décrits.*
*On utilisera préférentiellement les « bras de levier » pour les calculs de moments de forces*

**Exercices d'application :** Balançoire,guide circulaire, trois méthodes, vélo, basculements

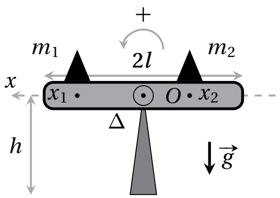
**Culture en sciences physiques :** Balançoire, excitation du pendule, basculements, patineur, engrenages

**Corrigés en TD :** Balançoire, freinage, basculements, excitation du pendule, patineur, engrenages

# Point matériel

## Exercice 1 : Balançoire à bascule

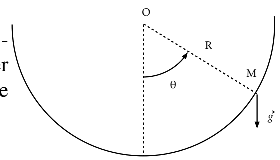
On considère une balançoire à bascule formée d'une planche homogène de longueur $2l$ fixée pouvant tourner autour de l'axe fixe horizontal $\Delta$ placé à une distance $h$ du sol. On néglige tout frottement au niveau de l'axe.




1. Appliquer la loi du moment cinétique à la planche en rotation autour de l'axe fixe $\Delta$. Où l'axe doit-il être placé pour que la planche puisse demeurer horizontale ? La masse de la planche importe-t-elle ? Peut-elle demeurer immobile en formant un angle $\theta$ non nul avec l'horizontale ?
2. Un enfant de masse $m_1$, que l'on considérera comme solidaire de la planche, s'assoit sur la planche, son centre d'inertie étant à la distance $x_1$ de l'axe $\Delta$. Où doit se placer un autre enfant de masse $m_2$ pour que la planche puisse demeurer horizontale.
3. Un enfant de masse $m_1$ se place à l'extrémité de la planche. Un ressort vertical de longueur à vide $l_0$ et de raideur $k$, dont une extrémité est fixée au sol à l'aplomb de l'autre extrémité de la planche maintient l'ensemble immobile. Quelle doit être la raideur du ressort ?

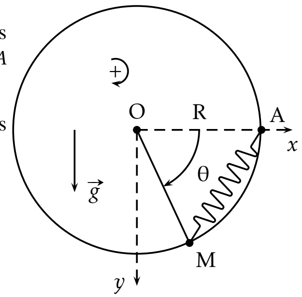
## Exercice 2 : Guide circulaire

Un point matériel repéré par la position $M$ se déplace dans un guide hémicylindrique horizontal de rayon $R$ dans le champ de pesanteur terrestre. Déterminer l'équation d'évolution de l'angle $\theta$ des coordonnées cylindriques et la période de ses petites oscillations. On utilisera le théorème du moment cinétique.




## Exercice 3 : Trois méthodes

Un point matériel de masse $m$, repéré par le point $M$ est assujetti à glisser sans frottement sur un cerceau vertical de rayon $R$ et de centre $O$. Il est lié au point $A$ par un ressort de raideur $k$ et de longueur au repos nulle.




1. Établir l'équation du mouvement du mobile en utilisant successivement les trois méthodes suivantes :
   (a) le théorème du moment cinétique,
   (b) la loi de la quantité de mouvement,
   (c) le théorème de l'énergie cinétique.
2. Discuter l'existence de positions d'équilibre, leur stabilité, et dans l'affirmative, la période des petites oscillations au voisinage de l'équilibre.

## Exercice 4 : Excitation d'un pendule simple

On étudie la possibilité d'augmenter l'énergie, et donc l'amplitude des oscillations, en raccourcissant et rallongeant périodiquement la longueur $l$ d'un pendule en modifiant périodiquement sa longueur sur la corde. On néglige tout frottement et on assimile le système à un pendule simple constitué d'un point matériel $M$ de masse $m$ au bout d'une corde de longueur $l$.

1. On raccourcit la corde d'une longueur $\Delta l$ quand le pendule passe par la verticale à l'instant $t = 0$, avec un vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$. On considère que cette opération s'effectue instantanément.
   (a) Donner l'expression du moment cinétique $\sigma_{/\Delta}(M)$ par rapport à l'axe $\Delta$ juste avant le raccourcissement.
   (b) Quelle est la force à l'origine de ce raccourcissement ? Quelle propriété possède-t-elle ? En déduire le moment cinétique puis le vecteur vitesse juste après le raccourcissement.
2. (a) En déduire le travail à fournir pour réaliser la traction dans ces conditions.
   (b) Calculer ce travail pour une traction de $\Delta l = 3{,}0\,\mathrm{m}$ sur une longueur initiale de $l = 21\,\mathrm{m}$, pour une vitesse $v = 68\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ et pour une masse de $50\,\mathrm{kg}$. Ce travail vous paraît-il réalisable par un groupe de huit hommes tirant de concert ?
   (c) Le processus doit être périodique si l'on souhaite continuer à augmenter l'énergie du dispositif. À quel instant sera-t-il préférable de rallonger la corde ?

# Solide

## Exercice 5 : Perceuse

On étudie le mouvement de rotation d'une perceuse électrique de bricolage. L'ensemble du foret et du mors constitue un solide en rotation autour de l'axe de symétrie de révolution du mors, noté $\Delta$.
La notice d'utilisation de la perceuse indique une vitesse de rotation variable du mors par rapport à la perceuse pouvant aller jusqu'à 2300 tours par minute. On utilise un foret de diamètre $d = 8{,}0\,\text{mm}$.

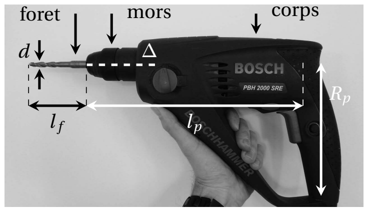


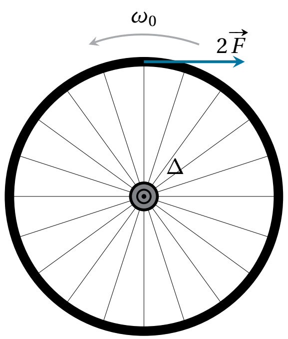

FIG. 1

On désigne par $l_f = 7{,}0\cdot10^{-2}\,\text{m}$ la longueur du foret à l'extérieur de la perceuse, par $l_p = 3{,}0\cdot10^{-1}\,\text{m}$ la longueur du corps de la perceuse et par $R_p = 1{,}8\cdot10^{-1}\,\text{m}$ la plus grande distance à l'axe du mors d'un point de la perceuse.

1. Déterminer la norme du vecteur vitesse des points de la périphérie du foret.
2. En raison d'un défaut de serrage, l'axe de symétrie du foret se déplace brusquement pendant qu'on l'utilise pour percer un trou dans un mur. On considère que les axes de symétrie du foret et du mors forment alors un angle de 5°.
   (a) On considère que le foret se bloque instantanément dans le mur quand il se désaxe. Si la perceuse n'est pas tenue assez fermement, on peut considérer que pendant un temps cours la vitesse de rotation du mors par rapport à celle-ci reste constante. Estimer la vitesse maximale que peut atteindre un point de la perceuse.
   (b) Si le mur est assez tendre et la perceuse maintenue assez fermement, on peut en revanche considérer que le corps de la perceuse reste immobile et que la vitesse de rotation du mors par rapport au corps reste la même. Estimer la vitesse maximale que peut atteindre un point du foret et décrire le trou formé.
3. Reprendre ces questions si c'est maintenant l'axe du mors de la perceuse qui en raison d'un défaut de fabrication forme un angle $\alpha$ avec celui du corps de la perceuse.

## Exercice 6 : Freinage à vélo

On considère une roue de bicyclette à rayons de rayon $R$ et de masse $m$ dont on étudie l'arrêt de la rotation par des freins à étrier. Chacun des deux freins exerce sur la jante une force d'intensité $F$ que l'on considérera constante tant que la roue tourne.
Le vélo étant retourné sur sa selle, la roue est en rotation autour de son moyeu fixe, noté $\Delta$. On néglige les frottements sur l'axe.

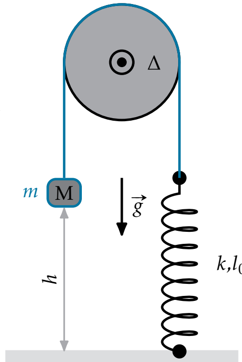



1. Quel est le modèle le plus approprié pour décrire le moment d'inertie de la roue : celui du cylindre plein ou celui du cylindre vide ? On prendra ce modèle par la suite.
2. Déterminer le moment résultant des forces de frottement par rapport à l'axe $\Delta$.
3. En déduire l'équation différentielle d'évolution de l'angle $\theta$ autour de l'axe $\Delta$.
4. En déduire les expressions de $\dot\theta(t)$ et $\theta(t)$ si à $t=0$ on a $\theta=0$ et $\dot\theta=\omega_0$.
5. Déterminer l'intensité $F$ de la force nécessaire pour arrêter la roue en un seul tour pour les paramètres suivants : $R = 33\,\text{cm}$, $m = 1{,}6\,\text{kg}$ et $\omega_0 = 17\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$. Cette force serait-elle supérieure ou inférieure pour une roue dite « lenticulaire » de même masse. Il s'agit de roues dans lesquelles les roues sont remplacées par des cônes uniformes reliant le moyeu à la jante.

## Exercice 7 : Poulie massive

On considère le dispositif ci-contre dans lequel la poulie a un rayon $R$ et un moment d'inertie $J_\Delta$ par rapport à son axe de rotation $\Delta$. On néglige la masse du fil, qui entraîne la poulie en rotation sans glisser. Le ressort est caractérisé par sa constante de raideur $k$ et sa longueur à vide $l_0$. L'objet $M$ de masse $m$ est abandonné sans vitesse initiale quand elle se trouve à la hauteur $h$ du sol, l'élongation du ressort étant alors nulle. On néglige tout frottement.

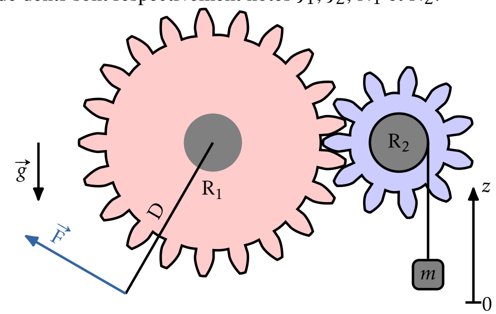
1. La tension est-elle uniforme dans le fil ? On pourra pour l'étudier applique la loi du moment cinétique à un système constitué de la poulie et du fil.
2. À quelle condition portant entre autres sur la masse $m$, l'objet atteindra-t-il le sol ?
3. Dans le cas contraire, déterminer l'expression de l'amplitude et la fréquence de ses oscillations.




## Exercice 8 : Transmission de puissance

On considère le dispositif ci-dessous formé de deux engrenages d'axes parallèles. Leurs moments d'inertie (par rapport à leurs axes de symétrie de révolution parallèles) et nombres de dents sont respectivement notés $J_1$, $J_2$, $N_1$ et $N_2$.

On exerce une force $\vec{F}$ (orthoradiale sur un levier de longueur $D$) sur le premier engrenage pour hisser une masse $m$ attachée à un fil sans masse qui s'enroule sur l'axe (de rayon $R_2$) du deuxième engrenage.
À l'état initial la masse est immobile en $z=0$.



1. (a) Établir une relation entre les vitesses angulaires des deux engrenages faisant intervenir leurs nombres de dents.
   (b) En déduire l'équation différentielle vérifiée par l'altitude $z$ de la masse $m$.
2. On étudie dans cette question un régime permanent dans lequel la masse monte à la vitesse constante $v_0$.
   (a) Déterminer l'intensité de la force (notée $F_0$) si la masse monte à la vitesse constante $v$.
   (b) Comparer la puissance fournie par l'opérateur à la puissance du poids de la masse $m$.
   (c) On a $D = 50\,\mathrm{cm}$, $R_1 = R_2 = 10\,\mathrm{cm}$ et $m = 150\,\mathrm{kg}$. L'opérateur est capable de développer une force de $300\,\mathrm{N}$. Comment choisir les nombres de dents pour qu'il puisse hisser une masse de $300\,\mathrm{kg}$ ? Quelle seront alors la vitesse d'ascension de la masse et la puissance qu'il développe s'il fait tourner le premier engrenage avec une fréquence de $1\,\mathrm{Hz}$ ?

## Exercice 9 : Basculements d'un parallélépipède

On étudie les basculements d'un parallélépipède autour d'une arête.

1. On place un parallélépipède rectangle, noté $\mathscr{S}$, sur un plan incliné d'un angle $\alpha$ par rapport à l'horizontale, perpendiculairement à la ligne de plus grande pente du plan (Figure 2). On admet que la force de frottement du support l'empêche de glisser et on étudie son éventuel basculement autour d'une de ses arêtes, $\Delta_1$ ou $\Delta_2$, alors qu'il est initialement immobile.

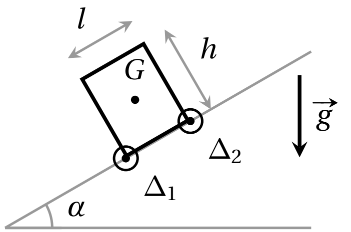



Fig. 2

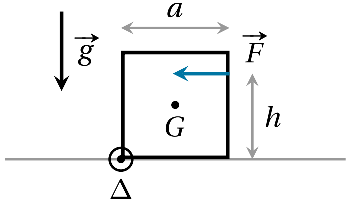


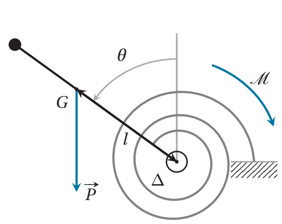

Fig. 3

   (a) Déterminer les signes du moment du poids par rapport à chacun des axes.
   (b) On considère que le contact avec le support est ponctuel quand le cube est en rotation autour d'un axe $\Delta$. Que peut-on dire du moment, par rapport à l'axe $\Delta$, de la force de contact exercée par le support sur le cube.
   (c) On fait l'hypothèse que l'objet a tout juste commencé à basculer autour de l'arête $\Delta_2$. Montrer, en y appliquant la loi du moment cinétique, que l'objet $\mathscr{S}$ recolle au support.
   (d) On fait l'hypothèse que l'objet a tout juste commencé à basculer autour de l'arête $\Delta_1$. Déterminer, en y appliquant la loi du moment cinétique, à quelle condition l'objet $\mathscr{S}$ continue à basculer.
2. Le parallélépipède est maintenant un cube d'arête $a$, que l'on souhaite faire avancer sur un plan horizontal et dont on note $m$ la masse (Figure 3).
   (a) On fait basculer le cube autour de son arête $\Delta$ en poussant avec une force $\vec{F}$. On admet qu'il ne glisse pas. Appliquer la loi du moment cinétique par rapport à l'axe $\Delta$ et en déduire la force minimale à appliquer pour provoquer le basculement en fonction de la hauteur $h$ à laquelle la force $\vec{F}$ est exercée. Où faut-il pousser pour exercer un effort minimal ?
   (b) Déterminer le travail à fournir pour faire tourner $\mathscr{S}$ d'un angle $\theta \leqslant \pi/4$. En déduire le travail minimal à fournir pour que le cube bascule.
   (c) On peut aussi faire glisser le cube. La force de frottement $\vec{T}$ exercée par le support est constante et a pour intensité $\mu m g$. Déterminer la force minimale à exercer pour faire glisser le cube.
   (d) Exprimer le travail minimal pour faire avancer le cube d'une longueur $l$.
   (e) Conclure : dans quels cas est-il plus avantageux de faire « rouler » le cube ? Qu'en est-il pour $\mu = 0{,}3$ (frottement bois sur bois).

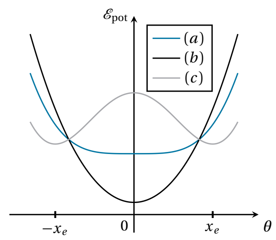
## Exercice 10 : Gravimètre

On étudie un gravimètre formé d'un ressort à spirale auquel est fixée rigidement une tige (Figure 4a). Ce ressort exerce sur la tige un moment de rappel harmonique $\mathscr{M}_{/\Delta} = -K\theta$ par rapport à l'axe $\Delta$ du ressort quand la tige a tourné d'un angle $\theta$. On désigne par $l$ la distance du centre d'inertie de la tige à l'axe $\Delta$ horizontal fixe et par $J$ le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe $\Delta$.

On néglige les frottements sur l'axe.




(a) Gravimètre de Holweck et Lejay




(b) Allure de $\mathscr{E}_{\text{pot}}(\theta)$ pour différentes valeurs du rapport $\alpha = 2mgl/K$

1. Justifier que le système est conservatif et donner l'expression d'une énergie potentielle $\mathscr{E}_{\text{pot}}$ associée.
2. La Figure 4b donne l'allure de la courbe $\mathscr{E}_{\text{pot}}(\theta)$ pour différentes valeurs du rapport $\alpha = 2mgl/K$. Classer ces courbes par valeurs croissantes de $\alpha$. Existe-t-il des positions d'équilibre ? Discuter leur stabilité.
3. (a) Effectuer un développement limité de $\mathscr{E}_{\text{pot}}$ au terme non nul d'ordre le plus bas en $\theta \ll 1$. On rappelle le développement limité de cos à l'ordre 4 en $\theta \ll 1$ :
$$\cos(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24}.$$
   (b) Retrouver les conclusions de la question 2.
   (c) Établir l'expression de la pulsation $\omega$ des petites oscillations dans le cas où l'équilibre est stable. On la mettra sous la forme :
$$\omega = \sqrt{\beta - \frac{mgl}{J}},$$
   avec $\beta$ une constante positive. Rappeler également l'expression de la pulsation d'un pendule pesant dont le centre d'inertie est à la distance $l$ de l'axe.

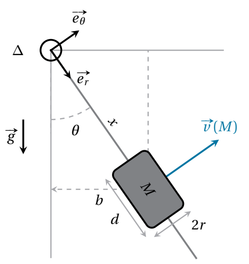
4. Calculer $\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}g}$ puis $\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}g}/\omega$ pour le gravimètre étudié et pour un pendule pesant. En déduire que ce dispositif peut être beaucoup plus sensible qu'un pendule simple pour mesurer l'accélération de la pesanteur $g$.

5. Ce dispositif peut également modéliser un manège de jardin d'enfants où l'enfant se balance sur un siège fixé au bout d'un ressort à boudin. Qu'observe-t-on si un adulte essaie de se balancer ?

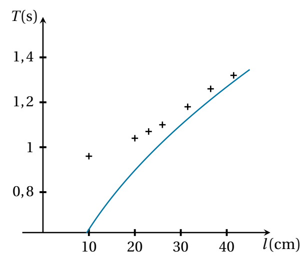
## Exercice 11 : Moments d'inertie d'un pendule pesant

On considère un pendule pesant formé d'une tige d'aluminium de longueur $l$ et de masse $m_1$ et d'un cylindre en laiton de masse $m_2$ (Figure 5a).

La Figure 5b rassemble les mesures de la période de ses petites oscillations en fonction de la distance $x$ entre le centre d'inertie du cylindre et l'axe $\Delta$ de rotation.




(a) Pendule pesant.




(b) Variation de la période des petites oscillations en fonction de la distance $x$. La courbe représente la période d'un pendule simple de longueur $x$.

1. Rappeler l'expression de la période d'un pendule simple constitué d'un point matériel de masse $m$ placé à la distance $x$ de l'axe $\Delta$ sur une tige sans masse. Cette courbe est représentée en trait plein sur la courbe 5b. Rappeler également la période d'un pendule pesant de moment d'inertie $J_\Delta$ par rapport à l'axe $\Delta$ dont le centre d'inertie est à la distance $x$ de l'axe.

2. Proposer une interprétation des différences entre la courbe expérimentale et les mesures en considérant les moments d'inertie du cylindre et de la tige.

3. On peut montrer que le moment d'inertie du cylindre a pour expression :

$$J_x = m_2 x^2 + m_2\left(\frac{r^2}{4}+\frac{d^2}{12}\right).$$

   Vérifier la vraisemblance de cette expression en considérant des valeurs extrêmes de $x$.

4. Proposer une expression pour le moment d'inertie de l'ensemble du dispositif et en déduire la période des petites oscillations en fonction de $x$. Tracer l'allure de la courbe correspondante.

## Exercice 12 : Résolution de problème : patineur artistique

On étudie une phénomène spectaculaire en patinage artistique, l'augmentation de la vitesse de rotation d'une pirouette.

Un patineur est en rotation, debout bras tendus sur la pointe de ses patins. On constate qu'il peut augmenter sa vitesse de rotation en rabattant ses bras le long de son corps.

1. Expliquer ce phénomène en considérant la variation de son moment d'inertie selon que ses bras sont ou non tendus.

2. Estimer le gain en vitesse de rotation.

3. Estimer un ordre de grandeur de la vitesse de rotation à l'issue du mouvement.

4. Estimer un ordre de grandeur du travail mécanique qu'il a dû fournir.

## Correction de l'exercice 1

Dans tout l'exercice, l'équilibre du dispositif $\mathcal{S}$ sera étudié par la loi du moment cinétique. Le système $\mathcal{S}$ étant un solide en rotation autour de l'axe fixe $\Delta$, il sera à l'équilibre si et seulement si son moment cinétique par rapport à l'axe $\Delta$, noté $\sigma_{/\Delta}(\mathcal{S})$, est nul ; il faudra alors que le moment résultant par rapport à l'axe $\Delta$ soit nul pour que $\sigma_{/\Delta}(\mathcal{S})$ soit constant.

1. Sans enfants, le système n'est constitué que de la planche. Il est soumis uniquement à son poids $\overrightarrow{P}$ et à la réaction de l'axe $\Delta$, de résultante $\overrightarrow{R}$. En l'absence de frottement, le moment de celle-ci par rapport à l'axe $\Delta$ est nul : il ne reste plus que celui du poids à considérer. Puisque ce dernier s'exerce au centre d'inertie $G$ de la planche, son moment $\mathcal{M}_{/\Delta}(\overrightarrow{P})$ est nul si et seulement si le bras de levier du poids est nul, c'est-à-dire si $G$ est situé sur l'axe $\Delta$. L'axe doit bien évidemment passer par le centre géométrique de la planche. La masse de la planche n'aura aucune influence sur son équilibre. Elle en aurait en revanche si on étudiait sa vitesse. Cette condition d'équilibre est indépendante de l'angle : la planche sera tout aussi bien à l'équilibre à $\theta = 0$ qu'à $\theta = \pi/4$.

2. On considère désormais le système $\mathcal{S}$ formé de la planche et des deux enfants comme un solide, soumis en plus des forces précédentes, aux poids des deux enfants. Les bras de leviers de ces forces sont respectivement $|x_1|$ et $|x_2|$ et le moment est positif si $x \geqslant 0$. On a donc, pour $i = 1,2$ $\mathcal{M}_{/\Delta}(\overrightarrow{P_i}) = m_i g x_i$ et pour que le système demeure à l'équilibre, on doit avoir :
$$\mathcal{M}_{/\Delta}(\overrightarrow{P_1}) + \mathcal{M}_{/\Delta}(\overrightarrow{P_2}) = 0 \text{soit : } m_1x_1 + m_2x_2 = 0 \quad \text{et donc : } |x_1/x_2| = |m_2/m_1|.$$
C'est l'enfant le plus lourd qui doit être placé le plus près de l'axe. Ce principe de comparaison des poids est également utilisé dans les balances romaines.

3. Les bras de levier de la tension du ressort (d'intensité $k(h-l_0)$) et du poids de l'enfant étant égaux, leurs intensités doivent également l'être. On doit avoir $k(h-l_0) = m_1 g$.

## Correction de l'exercice 2

Le problème est formellement identique à celui du pendule simple, la réaction du support $\overrightarrow{N}$ étant l'analogue de la tension du fil. On retrouve les mêmes résultats : $\ddot\theta + \omega_0^2 \sin\theta = 0$, avec $\omega_0 = \sqrt{g/R}$, et donc des oscillations de petite amplitude de pulsation $\omega_0$.

## Correction de l'exercice 3

1. On commence par déterminer la norme du vecteur $\overrightarrow{AM}$, selon $AM = 2R|\sin(\theta/2)|$. Le point matériel est soumis à son poids $\overrightarrow{P} = mg\overrightarrow{e}_y$, à la réaction du support, toujours radiale car il n'y a pas de frottement, ainsi qu'à la tension du ressort, de norme $k|AM| = k|2R\sin(\theta/2)|$.

   **Théorème du moment cinétique** On va choisir de l'appliquer par rapport à l'axe $(O, \overrightarrow{e}_z)$, fixe, car le moment de la réaction du guide y est nul[i]. On n'a alors à considérer que le moment du poids, $\mathcal{M}_\Delta(\overrightarrow{P}) = mgR\cos\theta\overrightarrow{e}_z$ (déterminé au moyen du bras de levier) et celui de la tension du ressort. Le bras de levier de la tension $\overrightarrow{T}$, noté $d$, vaut ici $d = R|\cos(\theta/2)| = R\cos(\theta/2)\,\forall\theta$. On doit alors prêter attention au signe du moment :

   - pour $\theta \in [0;\pi]$ *ie* $\sin\frac{\theta}{2} > 0$, on a $\mathcal{M}_\Delta(\overrightarrow{T}) = -kAMd$ puisque comme $AM > 0$ le rappel vers $A$ fait tourner dans le sens négatif. On peut donc écrire :
   $$\mathcal{M}_\Delta(\overrightarrow{T}) = -kAMd = -2kR^2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = -kR^2\sin\theta$$
   - pour $\theta \in [-\pi;0]$, on a $\sin\frac{\theta}{2} < 0$ mais toujours $\cos\frac{\theta}{2} > 0$. Par ailleurs, on a maintenant $\mathcal{M}_\Delta(\overrightarrow{T}) = +kAMd$ : lorsque le ressort est étendu, il fait tourner dans le sens positif. On a alors :
   $$\mathcal{M}_\Delta(\overrightarrow{T}) = +kAMd = 2kR^2\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = -kR^2\sin\theta \quad \text{puisque : } \sin\frac{\theta}{2} < 0.$$

   On obtient alors une expression valable pour tout angle : $\mathcal{M}_\Delta(\overrightarrow{T}) = -kR^2\sin\theta$.
   Le moment cinétique par rapport à $(O, \overrightarrow{e}_z)$ vaut facilement $\sigma_{/\Delta} = mR^2\dot\theta$ (expression pour un mouvement circulaire). L'application du théorème du moment cinétique par rapport à $(O, \overrightarrow{e}_z)$ fixe établit alors l'équation du mouvement :
   $$\ddot\theta = \frac{g\cos\theta}{R} - \frac{k}{m}\sin\theta.$$

   **Loi de la quantité de mouvement** On a ici intérêt à utiliser l'expression vectorielle de la tension du ressort. On a $\overrightarrow{T} = -k\overrightarrow{AM}$, avec $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM} = -R\overrightarrow{e}_x + R\overrightarrow{e}_r = R(1-\cos\theta)\overrightarrow{e}_r + R\sin\theta\overrightarrow{e}_\theta$. On peut reprendre l'expression précédente de sa norme : $AM = 2R\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$ pour obtenir $\overrightarrow{T} = -kR\left((1-\cos\theta)\overrightarrow{e}_r + \sin\theta\overrightarrow{e}_\theta\right)$.
   Comme la réaction du support est purement radiale, on projette le principe fondamental de la dynamique selon $\overrightarrow{e}_\theta$ pour s'en débarrasser. L'accélération en mouvement circulaire est $\overrightarrow{a} = -R\dot\theta^2\overrightarrow{e}_r + R\ddot\theta\overrightarrow{e}_\theta$. On en déduit, sur $\overrightarrow{e}_\theta$ : $mR\ddot\theta = \overrightarrow{P}\cdot\overrightarrow{e}_\theta + \overrightarrow{T}\cdot\overrightarrow{e}_\theta = mg\cos\theta - kR\sin\theta$. On retrouve bien le même résultat.

   **Théorème de l'énergie mécanique** Le poids et la tension du ressort sont des forces conservatives, leur énergie potentielle vaut respectivement : $\mathcal{E}_P(P) = -mgy + cste = mgR(1-\sin\theta)$ (en choisissant l'origine des énergies potentielles en $\theta = 0$) et :
   $$\mathcal{E}_P(T) = \frac{1}{2}kAM^2 = 2kR^2\sin^2\frac{\theta}{2}.$$
   Comme la réaction du guide ne travaille pas (pas de frottement), l'énergie mécanique, somme de l'énergie cinétique $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mR^2\dot\theta^2$ et des énergies potentielles calculées se conserve :
   $$\frac{1}{2}mR^2\dot\theta^2 + mgR(1-\sin\theta) + 2kR^2\sin^2\frac{\theta}{2} = \text{cste}$$
   $$\text{soit : } \frac{1}{2}\dot\theta^2 + \frac{g}{R}(1-\sin\theta) + \frac{2k}{m}\sin^2\frac{\theta}{2} = \text{cste}.$$
   La dérivation de cette égalité par rapport au temps redonne bien l'équation du mouvement.

2. On détermine les positions d'équilibre en cherchant les solutions $\ddot\theta = 0$ dans l'équation du mouvement. On obtient alors : $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta = \frac{\Omega^2}{\omega^2}$, avec $\omega^2 = k/m$ (pulsation propre du système masse-ressort) et $\Omega^2 = g/R$ pulsation propre du pendule simple associé. Les deux solutions de cette équation sont $\theta_0 = \arctan(\omega^2/\omega^2)$ (dans l'intervalle $[O - \pi/2]$ car $\Omega^2/\omega^2 \geqslant 0$) et $\pi + \theta_0$ (ne pas oublier que arctan est $\pi$-périodique). Pour déterminer si ces positions correspondent à des équilibres stable ou instable, il suffit de regarder le signe de $\frac{d^2\mathcal{E}_P}{d\theta^2}$ : positif l'équilibre sera stable, négatif, il sera instable. Cette dérivée seconde est ici proportionnelle (via un cœfficient positif) à : $\omega^2\cos\theta + \Omega^2\sin\theta = \cos\theta\left(\omega^2 + \Omega^2\tan\theta\right) = \cos\theta\left(\omega^2 + \Omega^4/\omega^2\right)$ puisque les positions d'équilibre sont définies par $\tan\theta = \Omega^2/\omega^2$. La nature de l'équilibre est donc déterminée uniquement par le signe de $\cos(\theta)$. Pour $0 \leqslant \theta_0 \leqslant \pi/2$, l'équilibre sera stable alors qu'il sera instable pour la position d'équilibre diamétralement opposée. La linéarisation de l'équation du mouvement au voisinage de $\theta_0$, position d'équilibre stable, consiste à en établir le développement

[i] On aurait également pu appliquer le théorème au point $A$ lui aussi fixe ce qui semblerait avoir l'avantage de faire disparaître la tension du ressort (de moment alors nul en $A$) mais ce faisant, on doit alors tenir compte du moment de la réaction qui lui n'est plus nul.

de Taylor à l'ordre 1 au voisinage de $\theta_0$. On a alors : $\sin\theta \simeq \sin\theta_0 + \delta\cos\theta_0$ et $\cos\theta \simeq \cos\theta_0 - \delta\sin\theta_0$, avec $\delta = \theta - \theta_0$. On obtient alors, en tenant compte du fait que $\omega^2\sin\theta_0 = \Omega^2\cos\theta_0$ :

$$\ddot{\delta} = -(\omega^2\cos\theta_0 + \Omega^2\sin\theta_0)\delta,$$

dans laquelle on reconnaît bien évidemment l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\omega_0^2\cos\theta_0 + \Omega^2\sin\theta_0}$. La période des petites oscillations vaut alors $T = 2\pi/\omega_0$.

## Correction de l'exercice 4

1. (a) Le vecteur vitesse étant à cet instant orthogonal au vecteur $\overrightarrow{OM}$, le moment cinétique par rapport l'axe $\Delta$ est $\sigma_{/\Delta}(M) = mlv$.

   (b) Le pendule est soumis à son poids et la tension du fil. La tension est toujours centrale et le poids « passe par l'axe » à l'instant de la traction, considérée instantanée. Le moment cinétique $\sigma_{/\Delta}(M)$ est donc conservé. En notant $v + \Delta v$ la vitesse après le raccourcissement, on a donc :

$$mlv = m(l - \Delta l)(v + \Delta v) \text{soit : } \Delta v = v\frac{\Delta l/l}{1 - \Delta l/l}.$$

2. (a) On définit l'énergie mécanique du point matériel égale à la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle de pesanteur : $\mathscr{E}_\text{m} = \mathscr{E}_\text{c} + mgz$. On choisira l'énergie potentielle de pesanteur nulle quand $M$ se trouve en $\theta = 0$, à la distance $l$ de l'axe.

   La variation de l'énergie $\mathscr{E}_\text{m}$ est due au travail de la tension $\overrightarrow{T}$, que l'on note $W(\overrightarrow{T})$. Le théorème de l'énergie mécanique au cours de la traction pendant laquelle $M$ s'élève de $\Delta l$ s'écrit :

$$\frac{1}{2}m(v+\Delta v)^2 + mg\Delta l - \left(\frac{1}{2}mv^2 + 0\right) = W(\overrightarrow{T}).$$

   Avec l'expression précédente de $\Delta v$, on obtient finalement :

$$\begin{aligned} W(\overrightarrow{T}) &= \frac{1}{2}mv^2\left(\frac{2\Delta v}{v} + \frac{\Delta v^2}{v^2}\right) + mg\Delta l \\ &= \frac{1}{2}mv^2\left(\frac{2\Delta l}{l - \Delta l} + \frac{\Delta l^2}{(l-\Delta l)^2}\right) + mg\Delta l. \end{aligned}$$

   (b) On calcule $W(\overrightarrow{T}) = 4{,}7\cdot10^3$ J, soit $W(\overrightarrow{T})/8 = 5{,}9\cdot10^2$ J ce qui correspondrait au travail d'une force moyenne de $W(\overrightarrow{T})/(8\times3\,\text{m}) = 1{,}9\cdot10^2$ N, équivalente à un poids de $W(\overrightarrow{T})/(8\times3\,\text{m}\times g) = 20\,\text{kg}$ qu'un homme peut facilement exercer en tirant avec ses deux bras. En revanche, il n'est pas très commode de tirer rapidement sur une longueur de 3 m et un système de démultiplication fait que la traction, du côté des hommes, s'effectue sur une longueur de 1 m. La force que chacun doit développer est donc 3× plus intense, équivalente à un poids de 60 kg inférieur au poids de chacun des hommes : ils peuvent l'exercer en s'y suspendant.

   (c) On souhaite ne pas trop diminuer la vitesse lorsque l'on rallonge la corde. Il suffit pour cela d'effectuer cette partie du mouvement au sommet de la trajectoire où elle est nulle.

## Correction de l'exercice 5

1. Notons $\omega$ la pulsation de rotation du mors. On a $\omega = \frac{2\pi}{60}\times 2300 = 2{,}4\cdot10^2\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$. L'ensemble du foret et du mors constitue un solide en rotation autour de leur axe commun de symétrie. La vitesse des points de la périphérie est alors $\frac{d\omega}{2} = 9{,}6\cdot10^{-1}\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

2. (a) Le corps de la perceuse constitue ici un solide en rotation autour de l'axe du mors à la pulsation $\omega$. L'angle $\alpha$ n'influe que sur la direction de cet axe, pas sur les normes des vitesses de rotation. Les points les plus éloignés de cet axe auront la plus grande vitesse, égale à $\omega R_p = 4{,}3\cdot10^1\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Il est évident que cette vitesse ne sera pas conservée, d'une part parce que l'opérateur maintiendra le corps de la perceuse, et d'autre part parce que le moteur de la perceuse ne dispose pas d'une puissance suffisante.

   (b) L'axe du mors $\Delta$ reste ici horizontal et le foret constitue une solide en rotation autour de $\Delta$. Le foret décrit alors un cône de demi-angle au sommet $\alpha$ à la pulsation $\omega$. Son extrémité se trouvant à la distance $l_f\sin(\alpha) + dsin(\alpha)/2 = 1{,}4\,\text{cm}$, la norme de son vecteur vitesse est $1{,}9\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Le trou sera de forme conique.

3. L'angle $\alpha$ est désormais entre l'axe commun du foret et du mors et celui de la perceuse.

   (a) Si le foret se bloque, c'est l'axe du corps de la perceuse qui va décrire une trajectoire conique. La plus grande norme de vecteur vitesse sera pour le point situé à $l_p\sin(\alpha)$ de l'axe du mors, soit $\omega l_p\sin(\alpha) = 6{,}3\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. De nouveau, le corps sera bloqué par l'opérateur.

   (b) Ici l'axe du foret reste immobile, incliné par rapport à celui du corps de la perceuse. Les normes des vecteurs vitesse sont donc les mêmes que dans la première question. Le trou sera cylindrique de diamètre $d$ mais il faudra incliner le corps de la perceuse pour qu'il soit horizontal.

## Correction de l'exercice 6

1. L'essentiel de la masse est à la distance $R$ de l'axe, on choisira le moment du cylindre creux pour lequel $J = mR^2$.

2. Le bras de levier de chacune des forces est $R$, le moment résultant est donc : $\mathscr{M}_{/\Delta}(\overrightarrow{F}) = -2FR$.

3. La roue est soumise à son poids et à la réaction de l'axe qui ont tous deux un moment nul par rapport à l'axe $\Delta$ puisqu'elles passent toutes les deux par lui. La loi du moment cinétique par rapport à l'axe $\Delta$ s'écrit donc :

$$J\ddot{\theta} = -2FR.$$

4. Les conditions initiales étant $\theta(0) = 0$ et $\dot{\theta}(0) = \omega_0$, on en déduit immédiatement :

$$\dot{\theta}(t) - \omega_0 = -\frac{2FR}{J}t \quad \text{soit : } \theta(t) = \omega_0 t - \frac{FR}{J}t^2.$$

5. La roue s'arrête pour $\dot{\theta} = 0$ soit $t_\text{max} = J\omega_0/(2FR)$ et donc :

$$\theta_\text{max} = \omega_0 t_\text{max} - \frac{FR}{J}t_\text{max}^2 = \frac{\omega_0^2 J}{4FR} = \frac{mR\omega_0^2}{4F}.$$

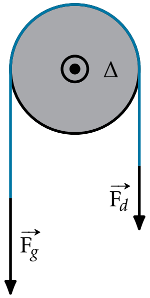
   Remarquons qu'on aurait également pu obtenir ce résultat par application du théorème de l'énergie mécanique avec $J\omega_0^2/2$ l'énergie cinétique initiale et $-2FR\theta$ le travail de la force de frottement. Pour avoir $\theta_\text{max} = 2\pi$, il faudra avoir $F = m\omega_0^2 R/(8\pi) = 6{,}0\,\text{N}$, facilement réalisable. La force nécessaire sera cependant bien plus importante si le vélo roule car la masse du cycliste augmentera beaucoup l'énergie cinétique de l'ensemble. Le problème n'est cependant plus celui d'un solide autour d'un axe fixe.

   Le moment d'inertie d'une roue lenticulaire sera inférieure puisqu'une partie de la masse est à une distance inférieure à $R$, le freinage sera donc plus efficace et il faudra une force inférieure pour arrêter la roue sur un tour.

## Correction de l'exercice 7

1. On considère le système, noté $\mathscr{S}$ formé par la poulie et le fil. Il ne s'agit pas à proprement parlé d'un fil puisque le fil est en mouvement relatif par rapport à la poulie mais la masse de ce celui-là étant négligeable, on ne considère pas son inertie. La poulie constitue quant à elle un solide et le moment d'inertie du système $\mathscr{S}$ se réduit donc, en notant $\omega$ la vitesse angulaire autour de l'axe orienté $\Delta$ :

$$\sigma_{/\Delta}(\mathscr{S}) = J_\Delta \omega \tag{1}$$




La loi du moment cinétique appliquée à $\mathscr{S}$ s'écrit, en notant $\overrightarrow{F_g}$ et $\overrightarrow{F_d}$ les forces exercées sur les brins du fil à gauche et à droite de la poulie, de bras de levier $R$ :

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{/\Delta}(\mathscr{S})}{\mathrm{d}t} = J_\Delta \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = (F_g - F_d)R. \rightarrow F_g - F_d = \frac{J_\Delta \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}}{R}.$$

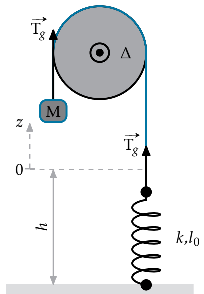
La loi des actions réciproques assure enfin que les tensions aux extrémités des brins, notées respectivement $T_g$ et $T_d$ sont égales aux normes des forces appliquées à leurs extrémités.

La tension du fil ne sera la même à chaque extrémité que si $\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = 0$, *ie* quand la rotation est uniforme. Comme le fil est sans masse on peut cependant montrer (il suffit d'appliquer la loi de la quantité de mouvement) que la tension est uniforme dans chacun des brins rectilignes. C'est le long de la portion enroulée que la tension varie sous l'effet des forces de frottement entre la poulie et le fil qui sont nécessaires pour que ce dernier ne glisse pas.

Remarquons que jusqu'à présent, quand on considérait une poulie idéale, on en négligeait la masse et donc le moment d'inertie, et on avait alors bien $T_g = T_d$.

2. Le système ne possède qu'un seul degré de liberté. En effet, les variations de l'altitude $z$ (orientée dans le sens ascendant) de la masse $m$ sont directement reliées à la rotation de la poulie autour de l'axe $\Delta$ puisque le fil ne glisse pas sur la poulie. On a en effet :

$$\dot{z} = -R\omega.$$




Il est alors avantageux d'utiliser un raisonnement énergétique. Choisissons la position initiale de la masse $m$ comme origine des altitudes, quand sa vitesse est nulle.
La masse $m$ est soumise à son poids, conservatif d'énergie potentielle $mgz$ et au travail de la force de tension du fil $\overrightarrow{T_g}$. Le théorème de l'énergie mécanique appliqué à la masse $m$ entre l'instant initial, et un instant ultérieur s'écrit :

$$\frac{1}{2}m\dot{z}^2 + mgz - 0 = W(\overrightarrow{T_g}). \tag{2}$$

Considérons de nouveau le système $\mathscr{S}$ formé de la poulie et du fil. Son énergie cinétique se réduit comme précédemment à celle de la poulie, solide en rotation autour d'un axe fixe, soit $J_\Delta \omega^2$. Il est soumis aux forces de contact exercées sur les extrémités du fil par la masse et par le ressort. D'après le principe des actions réciproques, elle sont respectivement égales à $-\overrightarrow{T_g}$ et $-\overrightarrow{T_d}$. La poulie est également soumise à la force de réaction exercée par son axe qui ne travaille pas et on néglige les frottements sur l'axe. Le théorème de l'énergie cinétique entre l'instant initial et un instant ultérieur s'écrit :

$$\frac{1}{2}J_\Delta \omega^2 = W(-\overrightarrow{T_g}) + W(-\overrightarrow{T_d}) = -W(\overrightarrow{T_g}) - W(\overrightarrow{T_d}).$$

Avec $\omega = -\dot{z}/R$, il vient :

$$\frac{J_\Delta \dot{z}^2}{2R^2} - 0 = -W(\overrightarrow{T_g}) - W(\overrightarrow{T_d}). \tag{3}$$

On détermine enfin le travail de la force $\overrightarrow{T_d}$ exercée par le brin de droite sur le ressort. L'élongation du ressort est, avec l'origine des $z$ choisie, simplement égale à $-z$. Le travail exercé par la tension du ressort (égale à $-\overrightarrow{T_d}$ d'après le principe des actions réciproques) sur l'extrémité droite du brin est égal à sa diminution d'énergie potentielle $Epot = kz^2/2$, soit :

$$W(-\overrightarrow{T_d}) = 0 - \frac{1}{2}kz^2 = -\frac{1}{2}kz^2. \tag{4}$$

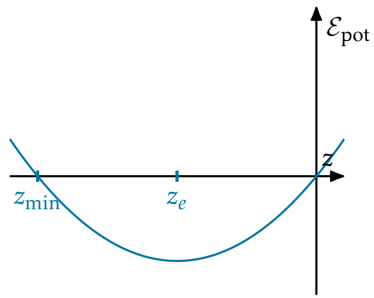
La somme des équation (2) et 3 donne enfin, compte-tenu de 4 :

$$\frac{1}{2}\left(m + \frac{J_\Delta}{R^2}\right)\dot{z}^2 + mgz = -\frac{1}{2}kz^2. \rightarrow \frac{1}{2}\left(m\dot{z}^2 + \frac{J_\Delta}{R^2}\right) + mgz + \frac{1}{2}kz^2 = 0. \tag{5}$$

Remarquons qu'on a finalement établi la conservation de l'énergie mécanique du système déformable formé du ressort, du fil, de la poulie et de la masse, qui est conservatif en l'absence de frottement et de glissement du fil sur la poulie. On a du le découper en trois sous-systèmes car seuls les solides en translation ou en rotation autour d'un axe fixe sont au programme…

On peut tracer la courbe de l'énergie potentielle :

$$\mathscr{E}_{\text{pot}} = mgz + \frac{1}{2}kz^2$$




L'énergie mécanique est initialement nulle avec $z = 0$ et $\dot{z} = 0$. Le sol sera atteint si l'altitude $z_{\text{min}}$, solution non nulle de $mgz + kz^2/2$ est inférieure à $-h$. On calcule immédiatement $z_{\text{min}} = -2mg/k$, le sol ne sera pas atteint si :

$$k > \frac{2mg}{h}.$$

3. L'énergie potentielle est harmonique. La position d'équilibre stable, minimum de $\mathscr{E}_{\text{pot}}$, est en $z_e = -mg/k$. Puisque l'énergie cinétique initiale est nulle, l'amplitude des oscillations sera $z(0) - z_e = mg/k$.

La conservation de l'énergie mécanique s'écrit, en introduisant $Z \equiv z - z_{\text{min}}$ :

$$\frac{1}{2}(m + \frac{J_\Delta}{R^2})\dot{Z}^2 + \frac{1}{2}kZ^2 = \text{cste}.$$

On reconnaît un oscillateur harmonique de pulsation :

$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{m + J_{\Delta / R^2}}}.$$

À masse et rayon de la poulie donnée, elle sera d'autant plus faible que le quotient $J_\Delta / R^2$ est élevé, *ie* que la masse est répartie à proximité de la périphérie de la poulie.

## Correction de l'exercice 8

1. (a) La vitesse linéaire du point de contact de chacune des roues est la même mais ils tournent en sens inverse. On en déduit, en notant respectivement $\omega_1$ et $\omega_2$ les vitesses angulaires de chacune des roues, qu'on a :

$$R_1\omega_1 = -R_2\omega_2. \tag{6}$$

(b) La vitesse d'ascension de la masse $m$ est égale à la vitesse linéaire de la roue 2 sur son rayon $R_2$ : $\dot{z} = R_2\omega_2$. On applique :

**la loi de la quantité de mouvement à la masse** $m$ . En notant $T$ l'intensité de la tension du fil, on a :

$$m\ddot{z} = -mg + T \tag{7}$$

**la loi du moment cinétique à la roue** 2 . On note $\mathcal{M}_{1\to 2}$ le moment des actions de contact exercé par la roue 1 sur la roue 2. Le bras de levier de la tension $T$ étant $R_2$, on a :

$$J_2\dot{\omega}_2 = -TR_2 + \mathcal{M}_{1\to 2}. \tag{8}$$

**la loi du moment cinétique à la roue** 1 . Le moment des actions de contact exercé par la roue 2 sur la roue 1 est $\mathcal{M}_{2\to 1}$. Le bras de levier de la force de l'opérateur étant $D$, on a :

$$J_1\dot{\omega}_1 = -FD + \mathcal{M}_{2\to 1}. \tag{9}$$

Le principe des actions réciproques assure par ailleurs que la force exercée par la roue 1 sur la roue 2 est l'opposée de celle exercée par la roue 2 sur la roue 1 mais leurs moments par rapport aux axes de rotation respectifs sont de même signe puisque les axes de rotation sont de part et d'autre du point de contact.

En moyenne leurs bras de levier par rapport aux axes de symétrie des roues sont dans le rapport des périmètres des roues soit dans celui des nombres de dents. On a donc :

$$N_1\mathcal{M}_{1\to 2} = N_2\mathcal{M}_{2\to 1}. \tag{10}$$

On a de plus $\omega_2 = R_2\dot{z}$, soit, en combinant les trois équations :

$$\ddot{z} + \left(\frac{mR_2N_1}{N_2} + \frac{N_2J_1}{N_1R_2} + \frac{N_1J_2}{N_2R_2} = FD - \frac{R_2N_1}{N_2}mg.\right) \tag{11}$$

2. (a) Pour un mouvement uniforme, on a $\ddot{z} = 0$ et donc :

$$FD = mgR_2\frac{N_1}{N_2}. \tag{12}$$

(b) La puissance fournie par l'opérateur est $-FD\omega_1$, celle du poids $-mg\dot{z}$. Leurs puissances sont donc :

$$\mathscr{P}(\vec{F}) = -FD\omega_1 = -mgR_2\frac{N_1}{N_2}\dot{\omega}_1 \qquad \mathscr{P}(\vec{P}) = -mg\dot{z} = -mgR_2\dot{\omega}_2. \to \mathscr{P}(\vec{F}) = -\mathscr{P}(\vec{P}), \tag{13}$$

puisque $\omega_1N_1 = -\omega_2N_2$. Le système d'engrenage permet donc, puisqu'on néglige les frottements, de transmettre intégralement la puissance fournie par l'opérateur à la masse.

Remarquons qu'on aurait pu établir directement l'équation (11) en écrivant le théorème de l'énergie cinétique sous la forme :

$$\dot{\mathscr{E}}_\text{c} = \mathscr{P}(\vec{F}) + \mathscr{P}(\vec{P}), \tag{14}$$

avec $\mathscr{E}_\text{c} = m\dot{z}^2/2 + J_1\dot{\omega}_1^2 + J_2\dot{\omega}_2^2$ ; $\mathscr{P}(\vec{F}) = -FD\omega_1$ et $\mathscr{P}(\vec{P}) = -mgR_2\dot{z}$.

(c) L'équation (12) donne pour ces paramètres géométriques et une masse de 300 kg

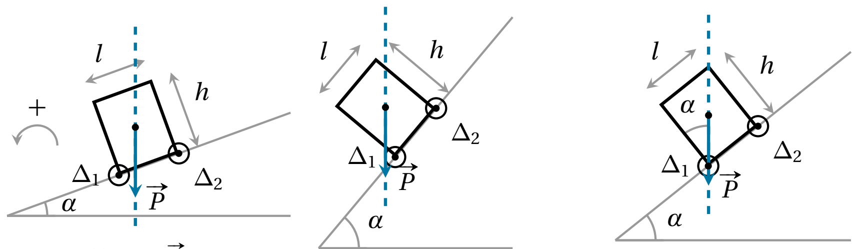
$$F = \frac{mgR_2N_1}{N_2D} = \frac{N_1}{N_2} \times 5{,}9 \cdot 10^2\,\text{N}. \tag{15}$$

Il pourra hisser cette masse en choisissant un rapport $N_2/N_1 \geqslant 1{,}96$.

Remarquons que la configuration représentée sur le schéma correspond à l'utilisation « en sens inverse » du dispositif puisqu'on y a $N_1 > N_2$. Elle permet de monter un objet léger plus rapidement que la vitesse du mouvement des bras ne le permettrait.

## Correction de l'exercice 9

1. (a) Le poids s'applique au centre d'inertie $G$. Le moment par rapport à un axe sera positif si et seulement si la droite verticale issue de $G$ passe à gauche de cet axe. Le moment par rapport à l'axe $\Delta_2$ sera donc toujours positif. Celui par rapport à l'axe $\Delta_1$ sera positif si $G$ est à gauche de l'arête (Figure 6).




(a) $\mathscr{M}_{/\Delta_1}(\vec{P}) < 0$. (b) $\mathscr{M}_{/\Delta_1}(\vec{P}) > 0$. (c) $\mathscr{M}_{/\Delta_1}(\vec{P}) = 0$.

FIG. 6 : Signe des moments du poids $\mathscr{M}_{/\Delta}(\vec{P})$ en fonction de l'angle $\alpha$. On a toujours $\mathscr{M}_{/\Delta_2}(\vec{P}) \geqslant 0$.

(b) Si le contact est ponctuel, la force de contact « passe par l'axe $\Delta$ » et son moment par rapport à l'axe $\Delta$ est nul.

(c) Si l'objet est légèrement décollé, seule l'arête $\Delta_2$ est en contact avec le support. La force de contact a donc un moment nul par rapport à $\Delta_2$. La loi du moment cinétique autour de l'axe $\Delta_2$ s'écrit donc :

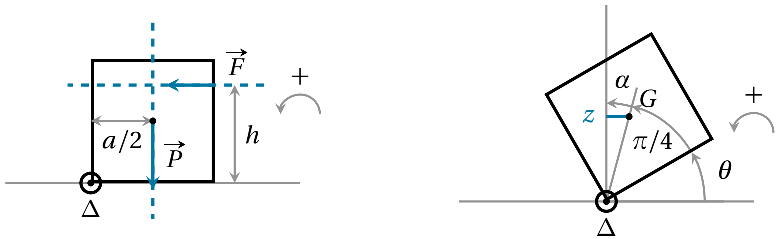
$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{/\Delta_2}(P)}{\mathrm{d}t} = \mathscr{M}_{/\Delta_2}(\overrightarrow{P}).$$

Le basculement autour de $\Delta_2$ correspond à une rotation dans le sens négatif : le moment du poids s'y oppose donc et ce dernier fait recoller l'objet au support.

(d) Il faut cette fois-ci tourner dans le sens positif pour basculer. Ce sera le cas si $\alpha$ est supérieur à $\arctan(l/h)$ (Figure 6c). On vérifie que plus l'objet est plat, c'est-à-dire plus $l$ est grand par rapport à $h$, plus le plan pourra être incliné avant que le basculement ne se produise.

2. (a) On suppose comme précédemment que le cube a juste commencé à se décoller : son basculement se poursuivra si le cube tourne dans le sens positif. Seuls le poids et la force $\overrightarrow{F}$ on un moment non nul par rapport à l'axe $\Delta$ et leurs bras de leviers respectifs sont $h$ et $a/2$ (Figure 7a). On applique la loi du moment cinétique :

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{/\Delta}(P)}{\mathrm{d}t} = \mathscr{M}_{/\Delta}(\overrightarrow{F}) + \mathscr{M}_{/\Delta}(\overrightarrow{P}) = Fh - \frac{mga}{2}.$$




(a) Bras de leviers du poids et de la force $\overrightarrow{F}$ intervenant lors du basculement.

(b) Altitude $z$ du centre d'inertie $G$ quand le cube est en rotation.

FIG. 7 : .

On aura donc basculement pour :

$$Fh \geqslant \frac{mga}{2}.$$

L'intensité sera minimale si le bras de levier est maximal, soit en $h = a$. Elle vaudra alors $F = mg/2$.

(b) Le poids étant conservatif, on définit l'énergie mécanique $\mathscr{E}_\mathrm{m} = \mathscr{E}_\mathrm{c} + mgz$, avec $z$ l'altitude du centre d'inertie $G$ par rapport au support. Le travail minimal correspond à amener le cube immobile à l'angle $\theta$.
Le centre d'inertie $G$ est toujours à la distance $a\sqrt{2}/2 = a/\sqrt{2}$ de l'axe $\Delta$. Son altitude est $z = a\cos(\alpha)/\sqrt{2}$ avec $\alpha$ l'angle entre la diagonale de la face du cube et la verticale (Figure 7b). On vérifie qu'on a $\alpha = \pi/4 - \theta$, et donc

$$z = \frac{a}{\sqrt{2}}(\cos(\pi/4 - \theta)) = (\sin(\theta) + \cos(\theta))\,\frac{a}{2}.$$

Selon le théorème de l'énergie mécanique, la variation de l'énergie mécanique est due au travail de la force non conservative $\overrightarrow{F}$ :

$$\Delta\mathscr{E}_\mathrm{m} = \Delta\mathscr{E}_\mathrm{pot} = \frac{mga}{2}(\sin(\theta) + \cos(\theta) - 1) = W(\overrightarrow{F}).$$

Il suffit, pour provoquer le basculement, que le centre dépasse l'aplomb de l'axe, comme on l'a vu dans l'étude du plan incliné. On doit donc atteindre $\theta = \pi/4$ et le travail minimal à fournir est :

$$W(\overrightarrow{F})_\mathrm{min} = \frac{mga}{2}\left(\sqrt{2} - 1\right).$$

(c) La loi de la quantité de mouvement assure qu'il faudra que l'intensité $F$ soit supérieure à $T = \mu mg$ pour déplacer le cube.

(d) On considère un déplacement de longueur $l$ où le cube est immobile au départ et à l'arrivée. Le travail de la force de frottement sera $W(T) = -\mu mgl$. En notant $W(F)$ le travail de la force $F$, le théorème de l'énergie cinétique s'écrit :

$$\Delta\mathscr{E}_\mathrm{c} = 0 = W(T) + W(F) \quad \text{c'est-à-dire} \quad W(F)_\mathrm{min} = \mu mgl.$$

(e) Il est donc :

- plus facile de faire rouler le cube si $mg/2 < \mu mg$, soit si $\mu > 1/2$,
- moins coûteux en énergie de le faire rouler si $amg\left(\sqrt{2} - 1\right)/2 < \mu mga$, soit si :

$$\sqrt{2} - 1 < 2\mu \text{soit : } \mu > 0{,}20.$$

Pour la valeur de $\mu$ donnée, il est moins coûteux en énergie de faire rouler le cube mais il faudra caler l'axe pour le faire basculer sans qu'il ne glisse.

## Correction de l'exercice 10

1. Le poids et le moment de rappel élastique sont conservatifs, d'énergies potentielles respectives $mgz$ et $K\theta^2/2$. Le mouvement sera conservatif en l'absence de frottement. En choisissant l'altitude nulle sur l'axe $\Delta$, on a $z = l\cos(\theta)$ et donc :

$$\mathscr{E}_\mathrm{pot} = \mathscr{E}_{\mathrm{pot},P} + \mathscr{E}_{\mathrm{pot},\mathscr{M}} = mgl\cos(\theta) + \frac{1}{2}K\theta^2 = \frac{1}{2}K\left(\theta^2 + \alpha\cos(\theta)\right).$$

2. On doit retrouver, au voisinage de $\theta = 0$, la parabole concave de $K\theta^2$ pour $\alpha$ petit et l'arche du cosinus pour $\alpha$ grand. On en déduit que $\alpha_b < \alpha_a < \alpha_c$. On a dans tous les cas un extremum local en $x = 0$ et donc une position d'équilibre. Elle sera stable si et seulement si il s'agit d'un minimum local, c'est-à-dire dans les cas $(a)$ et $(b)$. En revanche il apparaît dans le cas $(c)$ deux positions d'équilibre stable pour deux valeurs symétriques ($x_e$ et $-x_e$) non nulles de $\theta$.

3. (a) On développe, pour $\theta \ll 1$, $\cos(\theta) = 1 - \theta^2/2 + \theta^4/24$ pour obtenir :

$$\mathscr{E}_\mathrm{pot} \simeq \frac{1}{2}K\left(\theta^2 + \alpha\left(1 - \theta^2/2 + \theta^4/24\right)\right) = \frac{1}{2}K\left(\theta^2\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) + \frac{\alpha\theta^4}{24}\right) + \text{cste}. \tag{16}$$

(b) Si $\alpha \neq 2$, on peut se limiter au terme d'ordre 2. L'énergie potentielle est celle d'un oscillateur harmonique si $\alpha < 2$ et l'équilibre est alors stable. Il est instable dans le cas contraire.
Pour $\alpha = 2$, on garde le terme d'ordre 4 : $\mathscr{E}_\mathrm{pot} = \alpha K\theta^4/48$ qui est une fonction croissante de $\theta$ : l'équilibre est ici aussi stable.

(c) L'énergie cinétique du solide en rotation que constitue la tige est $\mathscr{E}_{\mathrm{c}} = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$. L'intégrale première du mouvement s'écrit alors :

$$\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}K\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\theta^2 = \text{cstesoit} : \dot{\theta}^2 + \frac{K}{J}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\theta^2 = \text{cste.}$$

On reconnaît celle d'un oscillateur harmonique de pulsation :

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{J} - \frac{mgl}{J}}.$$

On rappelle que la pulsation d'un pendule pesant est $\omega_0 = \sqrt{mgl/J}$.

4. On peut calculer directement $\frac{1}{\omega}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}g}$ en l'écrivant $\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}g}/\omega = \frac{\mathrm{d}\ln\omega}{\mathrm{d}g}$ (pour $\omega > 0$) :

$$\frac{1}{\omega}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}g} = \frac{\mathrm{d}\ln\omega}{\mathrm{d}g} = \frac{\mathrm{d}\frac{1}{2}\ln\left(\frac{K}{J} - \frac{mgl}{J}\right)}{\mathrm{d}g} = -\frac{ml(2J)}{K/J - mgl/J}.$$

On calcule de même :

$$\frac{1}{\omega_0}\frac{\mathrm{d}\omega_0}{\mathrm{d}g} = \frac{\mathrm{d}\ln\omega_0}{\mathrm{d}g} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{mgl}{2J}\right)}{\mathrm{d}g} = -\frac{1}{2g}.$$

On constate que $\frac{1}{\omega}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}g}$ sera d'autant plus important que $K/J$ et $mgl/J$ sont proches, c'est-à-dire que $\alpha$ est proche de 2. On pourra ainsi rendre la sensibilité arbitrairement plus grande que celle du pendule pesant.

5. Le moment du poids d'un adulte par rapport à l'axe est trop grand et on se trouve alors dans le régime $\alpha > 2$ : le système ne peut plus osciller autour de $\theta = 0$. Il oscille en revanche autour d'une des positions d'équilibre ($x_e$ ou $-x_e$) de la courbe ($c$) de la Figure 4b.

## Correction de l'exercice 11

1. Pour un pendule simple, on a $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{x/g}$. Pour un pendule pesant, on a $T = 2\pi\sqrt{J/(mgx)}$ (vu en cours).

2. Les mesures sont d'autant plus proches du modèle du pendule simple que $x$ est grand. En effet, la masse du cylindre est alors éloignée de l'axe, et répartie sur un volume peu étendu par rapport à la distance à l'axe : le cylindre se rapproche d'un point matériel. De même, le moment de son poids devient proche de celui d'un point matériel situé en $x$.

3. Ce moment d'inertie est la somme :

   - du moment d'inertie d'un point matériel de masse $m_2$ situé à la distance $x$ de l'axe,
   - du moment d'inertie du cylindre par rapport à un axe orthogonal à son axe de symétrie de révolution et passant par son centre (voir les expressions vues en cours).

   On retrouve l'expression vue en cours du moment d'inertie du cylindre pesant quand l'axe passe par le centre du cylindre, c'est-à-dire pour $x = 0$. Quand $x$ est très grand devant $d$ et $r$, le terme $m_2x^2$ prédomine et on retrouve le moment d'inertie d'un point matériel.

4. Le moment d'inertie $J_{\mathrm{tot}}$ du dispositif est la somme de celui de la tige, indépendant de $x$, noté $J_0$ et de celui du cylindre $J_x$. On a donc :

$$J_{\mathrm{tot}} = J_0 + J_x = J_0 + \frac{m_2r^2}{2} + \frac{m_2d^2}{12} + m_2x^2 = J_0' + m_2x^2,$$

avec $J_0' = \text{cste}$.

Les forces dont le moment par rapport à l'axe est non nul sont le poids $\overrightarrow{P}_1$ de la tige et celui du cylindre $\overrightarrow{P_2}$. Le centre d'inertie de la tige se situe à $l/2$ et celui du cylindre à $x$ de l'axe. Leurs bras de levier sont donc respectivement $l\sin(\theta)/2$ et $x\sin(\theta)$. La loi du moment cinétique s'écrit alors :

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{/\Delta}(\mathscr{S})}{\mathrm{d}t} = \mathscr{M}_{/\Delta}(\overrightarrow{P_t}) + \mathscr{M}_{/\Delta}(\overrightarrow{P_c})$$

$$\left(J_0' + m_2x^2\right)\ddot{\theta} = -g\left(\frac{m_1l}{2} + m_2x\right)\sin(\theta)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g(m_1l/2 + m_2x)}{J_0' + m_2x^2}\sin(\theta) = 0.$$

La période des petites oscillations sera donc :

$$T_x = 2\pi\sqrt{\frac{J_0' + m_2x^2}{g(m_1l/2 + m_2x)}}.$$

Cette expression :

- est non nulle pour $x = 0$,
- décroît comme $1/\sqrt{m_1l/2 + m_2x}$ pour $x$ petit,
- croît comme $\sqrt{x/g}$ pour $x$ grand.

Elle rend bien compte des mesures, comme on peut le constater sur la figure.

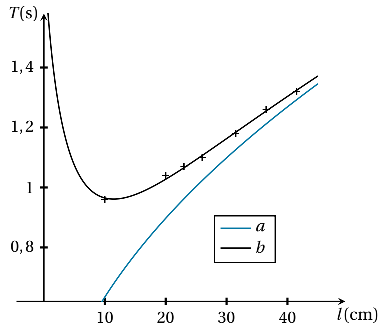



FIG. 8 : Période du pendule pesant déformable (courbe $b$) et du pendule simple (courbe $a$).